Nukleo - Ogólnopolski Konkurs Wiedzy o Energii Jądrowej

II edycja, rok szkolny 2021/2022

ETAP 2

ROZWIĄZANIA ZADAŃ Z TREŚCIĄ

Poniżej przedstawiamy rozwiązania zadań z treścią.

Zadanie 1 [8 punktów]

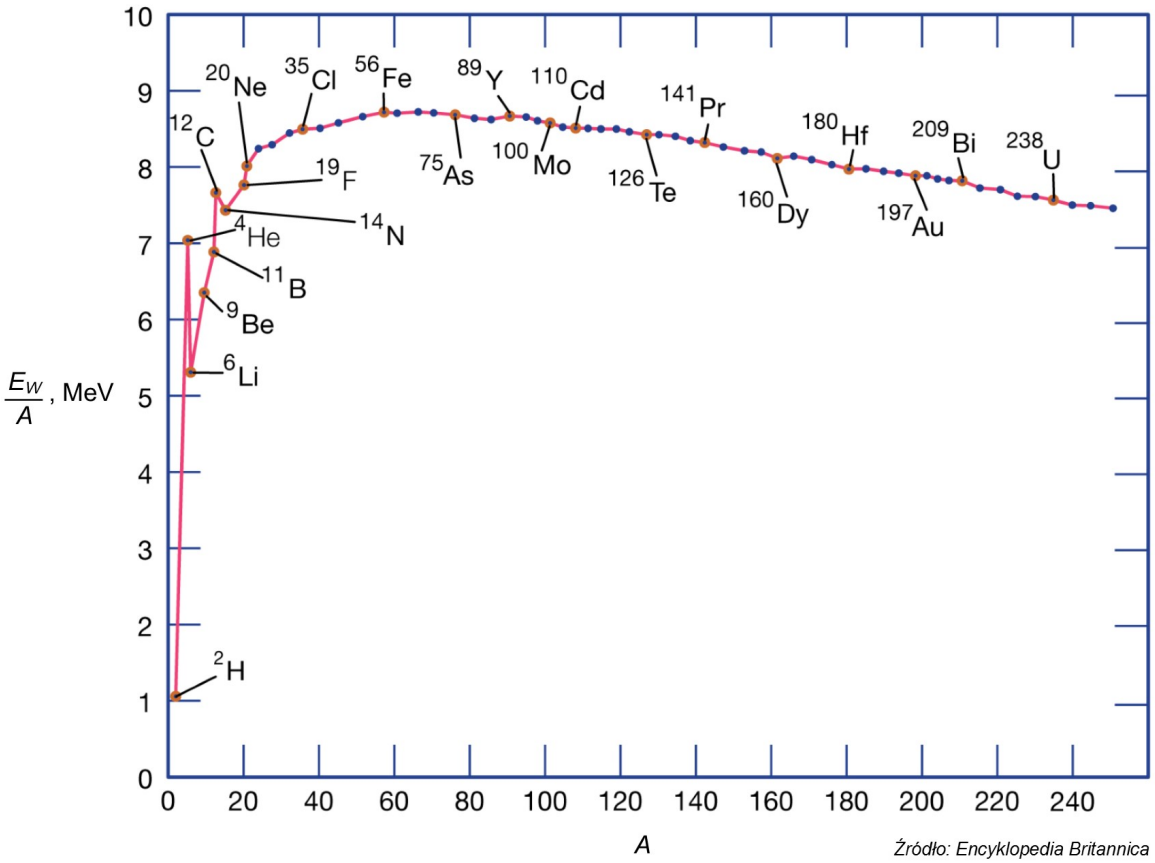
Podczas pierwszego etapu reakcji termojądrowej dwa jądra deuteru ${}^2H$ łączą się w jądro trytu ${}^3H$ i wydziela się przy tym bardzo duża ilość energii.

a) Uzupełnij schemat, tak aby otrzymać równanie opisanej reakcji.

$$ {}^2H + {}^2H \longrightarrow {}^3H + ... $$

b) Na poniższym wykresie na osi pionowej odłożona jest energia wiązania pojedynczego nukleonu, czyli iloraz energii wiązania jądra E_w przez liczbę nukleonów A. Na osi poziomej jest odłożona liczba nukleonów. Na podstawie wykresu oszacuj ilość energii wydzielonej podczas reakcji z punktu a. Wynik zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku.

c) Przyjmijmy, że opisana w punkcie a reakcja jest podstawą działania elektrowni jądrowej. Oblicz energię elektryczną, którą można wytworzyć z 1 g deuteru, jeżeli sprawność procesu przemiany energii jest równa 25%. Jako energię wydzieloną podczas reakcji między dwoma jądrami deuteru przyjmij wynik swojego oszacowania z punktu b. Wynik podaj w kilowatogodzinach (kWh).



Rozwiązanie:

a) Schemat reakcji zaspisujemy następująco:

$$^{2}H + \ ^{2}H \longrightarrow \ ^{3}H +^{1} H,$$

lub

$$^{2}H + \ ^{2}H \longrightarrow \ ^{3}H + p.$$

b) Z wykresu odczytujemy, że dla ^{2}H

$$\frac{E_w}{A} = (1,1 \pm 0,1)MeV.$$

Dla A=2 oraz N-liczba jąder (2) otrzymujemy

$$E_w = A \cdot \frac{E_w}{A} \cdot N = 2 \cdot 1,1 \cdot 2MeV = 4,4MeV.$$

Z wykresu odczytujemy odpowiednią wartość dla jądra trytu

$$\frac{E_w}{A} = (2,7 \pm 0,1)MeV$$

lub

$$\frac{E_w}{A} = (2,8 \pm 0,1)MeV$$

Inne przybliżone wartości także były uznawane.

$$E_w = A \cdot \frac{E_w}{A} = 3 \cdot 2,7MeV = 8,1MeV, \quad E_w = A \cdot \frac{E_w}{A} = 3 \cdot 2,8MeV = 8,4MeV.$$

czyli wydzielona energia

$$8,1MeV - 4,4MeV = 3,7MeV, \quad 8,4MeV - 4,4MeV = 4MeV$$

c) Masa spoczynkowa deuteru wynosi

$$M(^2H) = 2 \cdot u = 3,3 \cdot 10^{-27}kg.$$

Liczba reakcji rozzszczepienia odpowiadająca 1g zużytego deuteru wynosi

$$\frac{10^{-3}kg}{3,3 \cdot 10^{-27}kg} = 1,5 \cdot 10^{23},$$

a całkowita energia jest iloczynem liczby reakcji i energii wydzielanej podczas jednej reakcji

$$E = 1,5 \cdot 10^{23} \cdot 4MeV = 6 \cdot 10^{23}MeV = 6 \cdot 10^{23} \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}J = 9,6 \cdot 10^{10}J.$$

Wykorzystując, że $1J = 1$ "Watosekunda"$= \frac{1}{3600000}kWh$ otrzymujemy

$$E = 0,25 \cdot 9,6 \cdot 10^{10}J \cdot \frac{1}{3600000}kWh = 0,066667 \cdot 10^5kWh = 66667kWh \approx 6700kWh.$$

Zadanie 2 [8 punktów]

Satelita umieszczony na orbicie wykorzystuje ciepło wydzielone podczas rozpadu α izotopu plutonu-238 (^{238}Pu) jako źródło energii. Okres połowicznego rozpadu ^{238}Pu wynosi 87,7 lat. Sprawność przemiany energii cieplnej na energię elektryczną wynosi $\eta = 8\%$. W satelicie zainstalowany jest sprzęt, którego całkowite zapotrzebowanie na moc elektryczną wynosi $P_C = 290$ W. Określ, jak długo źródło energii będzie w stanie dostarczyć sprzętowi energię elektryczną, jeśli wiadomo, że w momencie wystrzelenia w satelicie było m = 6,21 kg ^{238}Pu. Na jeden akt rozpadu ^{238}Pu uwalniana jest energia $E_\alpha = 5,6$ MeV.

Rozwiązanie:

Zależność między mocą cieplna źródła plutonowego W_C, a mocą elektryczną zainstalowanych na satelicie urządzeń W_{EL} wynosi:

$$W_C(t) \cdot \eta = W_{EL}.$$

Moc cieplną uwolnioną w wyniku reakcji jądrowej w czasie t określa wyrażenie:

$$W(t) = \lambda \cdot N(t) \cdot E_\alpha,$$

gdzie: $\lambda = \frac{ln2}{T_{1/2}}$ - stała rozpadu promieniotwórczego, $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ - liczba atomów izotopu w czasie t, N_0 - początkowa liczba atomów. Możemy zatem zapisać:

$$W_{EL} \cdot \eta = \lambda \cdot N(t) \cdot E_\alpha \cdot \eta = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda t} \cdot E_\alpha \cdot \eta.$$

Stąd:

$$e^{-\lambda t} = \frac{\lambda \cdot N_0 \cdot E_\alpha \cdot \eta}{W_{EL}}.$$

Logarytmujemy stronami powyższą zależność i otrzymujemy:

$$\lambda t = ln(\frac{\lambda \cdot N_0 \cdot E_\alpha \cdot \eta}{W_{EL}}),$$

$$t = \frac{1}{\lambda} ln(\frac{\lambda \cdot N_0 \cdot E_\alpha \cdot \eta}{W_{EL}}).$$

Początkowa liczba atomów plutonu-238:

$$N_0 = \frac{m \cdot N_A}{M},$$

gdzie m = masa plutonu, N_A - liczba Avogadro, M - masa molowa.
Ostatecznie otrzymujemy:

$$t = \frac{T_{1/2}}{ln(2)} ln(\frac{ln(2) \cdot m \cdot N_A \cdot E_\alpha \cdot \eta}{W_{EL} \cdot T_{1/2} \cdot M}).$$

Po podstawieniu danych liczbowych szukany czas był ujemny:

$$t < 0.$$

Oznacza to, że:
Odpowiedź: ilość plutonu, którą zabrał satelita była niewystarczająca do zasilenia wszystkich urządzeń.

Zadanie 3 [10 punktów]

Jądrami zwierciadlanymi nazywamy taką parę jąder o tej samej liczbie masowej A, dla których liczba protonów jednego jądra jest równa liczbie neutronów jądra drugiego. Przykładami jąder zwierciadlanych są $^{15}_{7}$N i $^{15}_{8}$O, czy też $^{35}_{17}$Cl i $^{35}_{18}$Ar. Studiując cechy jąder zwierciadlanych można badać różnice pomiędzy oddziaływaniem proton-proton, neutron-neutron i proton-neutron.

Jądro ^{27}Si ulega przemianie $\beta+$, w wyniku której powstaje jego jądro zwierciadlane ^{27}Al. Maksymalna energia emitowanego w tym rozpadzie pozytonu to 3,48 MeV. Załóżmy, że różnica mas między jądrami wynika z różnicy energii kulombowskiej, jaką posiadają oraz, że jądra są równomiernie naładowanymi kulami o ładunku $Z \cdot e$, gdzie Z jest liczbą protonów w jądrze. Przyjmując, że promień jądra R jest dany przez $R = r_0 \cdot A^{1/3}$, gdzie A jest liczbą masową jądra, oszacuj wartość stałej r_0.

Rozwiązanie:
Przemianę β^+ jądra ^{27}Si określa równanie:

$$^{27}_{14}Si \rightarrow ^{27}_{13} Al + \beta^+ + \nu_e$$

Energia uwolniona w przemianie (Q_β) jest równa różnicy mas substratów i produktów, wymnożonych przez kwadrat prędkości światła. Masa neutrina jest zaniedbywalnie mała:

$$Q_\beta = \left[m(^{27}Si) - m(^{27}Al) - m_e)\right] c^2,$$

gdzie m i m_e oznaczają masę jądra oraz masę pozytonu, która jest równa masie elektronu, $m_e = 0,511$ MeV/c^2.

Czytając o przemianie β można spotkać informację, że energia przemiany jest równa różnicy mas atomu początkowego i końcowego oraz dwóch mas elektronów. Druga masa elektronu bierze się stąd, że atom końcowy musi mieć o jeden elektron więcej niż atom początkowy. W naszym zadaniu rozważamy masy jąder atomowych, dlatego w równaniu uwzględniona jest tylko jedna masa elektronu. Jako, że w większości książek uwzględnione są masy atomowe, nie jądrowe, rozwiązania uwzględniające dwie masy elektronów zostały zaakceptowane bez straty punktów.

Z treści zadania wiemy, że różnica mas $m(^{27}Si) - m(^{27}Al)$ wynika z różnicy energii kulombowskiej jąder. Energia kulombowska równomiernie naładowanej kuli o ładunku Z·e wynosi:

$$E_c = \frac{3}{5}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Ze)^2}{R},$$

gdzie R jest promieniem kuli. W przypadku jąder atomowych przyjmujemy, że $R = A^{1/3}r_0$.
Energia uwolniona w przemianie β^+ równa jest maksymalnej energii kinetycznej pozytonu, $Q_\beta =$ 3,48 MeV. Finalnie wyrażenie przyjmuje postać:

$$Q_\beta + m_e c^2 = \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_0 27^{1/3}}(14^2 - 13^2)$$

Za $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$ wygodnie jest wstawić 1,44 MeV·fm.
Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy:

$$\frac{3}{5}\frac{27}{3r_0}1,44MeV\cdot fm = 4MeV,$$

skąd $r_0 = 1,9$ fm.
Odpowiedź: Stała r_0 we wzorze na promień jądra atomowego wynosi 1,9 fm.

Zadanie 4 [10 punktów]

Do krwi pacjenta wstrzyknięto 1 cm^3 roztworu zawierającego izotop promieniotwórczy ^{24}Na, którego okres połowicznego rozpadu $T_{1/2}$ wynosi 15 h. Aktywność 1 cm^3 krwi pobranej od pacjenta po 5 h była 7300 razy mniejsza niż w przypadku roztworu oryginalnego. Określ całkowitą objętość krwi pacjenta. Przedstaw odpowiedź w litrach i zaokrąglij ją do jednego miejsca po przecinku. Przyjmij, że rozcieńczenie roztworu zawierającego izotop promieniotwórczy ^{24}Na jest równomierne w całej objętości krwi.

Rozwiązanie:

Aktywność całkowitej objętości krwi pacjenta w chwili t:

$$A_1 = A_0 \cdot e^{-\lambda t},$$

gdzie A_0 - początkowa aktywność roztworu.
Aktywność próbki krwi o objętości V_0 w chwili t:

$$A_2(t) = A_1(t)\frac{V_0}{V} = A_0\frac{V_0}{V} \cdot e^{-\lambda t},$$

gdzie V to całkowita (szukana) objętość krwi, λ - stała połowicznego rozpadu izotopu ^{24}Na, $\lambda = \frac{ln(2)}{T_{1/2}}$.
Wiemy, że aktywność 1 cm^3 krwi pobranej od pacjenta po 5 h była 7300 razy mniejsza niż w przypadku roztworu oryginalnego, zatem możemy zapisać:

$$n = \frac{A_0}{A_2(t)} = 7300.$$

Stąd:

$$A_0 = n \cdot A_2(t).$$

Wówczas aktywność próbki krwi wynosi:

$$A_2(t) = n \cdot A_2(t)\frac{V_0}{V} \cdot e^{-\lambda t}.$$

Po przekształceniach otrzymujemy wzór na całkowitą objętość krwi pacjenta:

$$V = n \cdot V_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

Podstawiamy dane liczbowe:

$$V_0 = 10^{-6}m^3, T_{1/2} = 15h = 5,4{\cdot}10^4, t_2 = 5h = 1,8{\cdot}10^4 s.$$

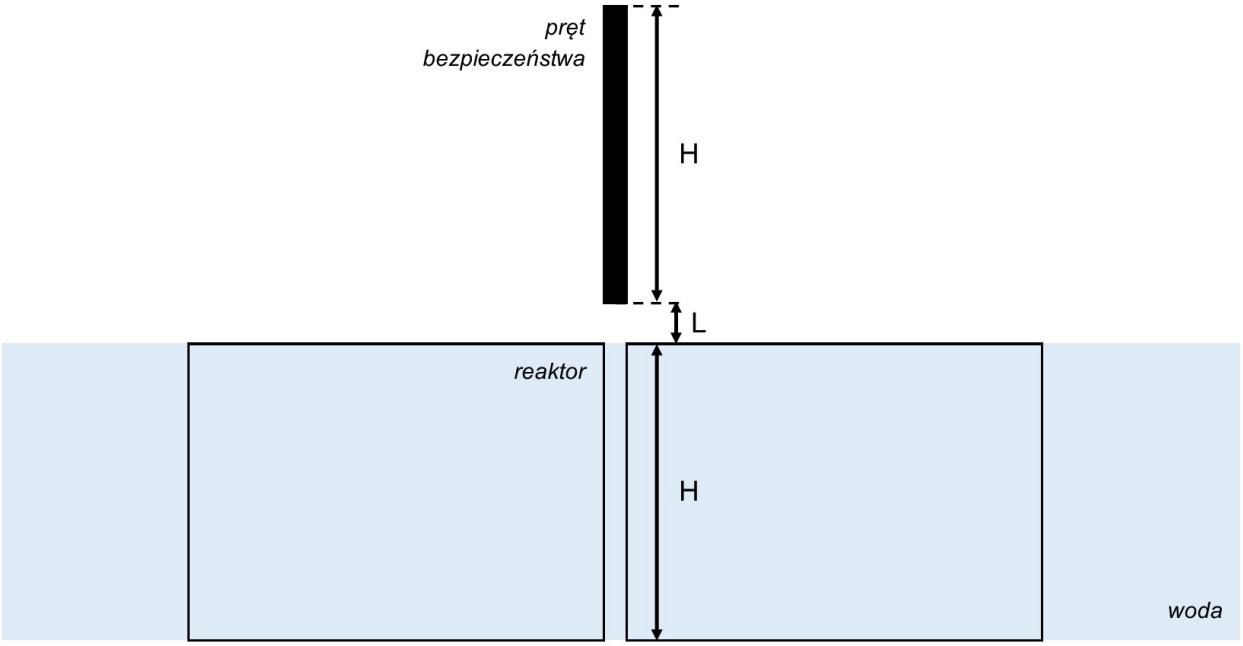
$$V = 7300{\cdot}10^{-6}m^3{\cdot}e^{-\frac{ln(2)}{5,4{\cdot}10^4 s}1,8{\cdot}10^4 s} = 7300{\cdot}10^{-6}{\cdot}e^{-0,231}m^3 = 7300{\cdot}10^{-6}{\cdot}0,794m^3 = 0,0058m^3 = 5,8l$$

Odpowiedź: Objętość krwi pacjenta wynosi 5,8 litra.

Zadanie 5 [15 punktów]

W przypadku awarii w reaktorze jądrowym reakcja łańcuchowa rozszczepienia jest zatrzymywana przez wprowadzenie pręta bezpieczeństwa, zdolnego do pochłaniania neutronów, do rdzenia reaktora. Pręt bezpieczeństwa utrzymywany jest na elektromagnesie w czasie normalnej pracy reaktora, a zwalniany jest w chwili wystąpienia sytuacji awaryjnej. Pręt wpada do rdzenia wyłącznie pod wpływem siły grawitacji. Oblicz czas spadku pręta o masie $m = 10\ kg$ i długości $H = 7\ m$, jak pokazano na rysunku, jeśli wiadomo, że znajduje się on w odległości $L = 5\ cm$ nad rdzeniem reaktora o wysokości H wypełnionym wodą. Za zakończenie spadku uważa się całkowite zanurzenie pręta w

rdzeniu. Pomiń opór powietrza, siła oporu wody jest stała i równa $F = 95\ N$.



Rozwiązanie:

Całą drogę podzielmy na dwa odcinki: pierwszy o długości L i drugi o długości H. Rozważmy na początek czas spadku pręta na odcinku o długości L:

$$L = \frac{g \cdot t_1^2}{2} \rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}.$$

Początkowa prędkość ruchu pręta na drugim odcinku:

$$v_{02} = gt_1 = \sqrt{2gL}.$$

Rozważmy siły działające na pręt po zanurzeniu w wodzie:

$$ma_2 = mg - F \rightarrow a_2 = \frac{mg - F}{m}.$$

Rozważmy ruch pręta na drugim odcinku:

$$H = v_{02}t_2 + \frac{a_2 t_2^2}{2},$$

$$H = \sqrt{2gL} \cdot t_2 + \frac{mg - F}{2m} \cdot T_2^2.$$

Otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$\frac{mg - F}{2m} \cdot T_2^2 + \sqrt{2gL} \cdot t_2 - H = 0.$$

Rozwiazujemy równanie kwadratowe, obliczamy deltę:

$$\Delta = 2gl + 4H\frac{mg - F}{2m} > 0.$$

Równanie ma dwa rozwiązania:

$$t_2 = \frac{-\sqrt{2gl} \pm \sqrt{2gl + 2H\frac{mg-F}{m}}}{\frac{mg-F}{m}},$$

zatem:

$$t_2 = \frac{m(-\sqrt{2gl} \pm \sqrt{2gl + 2H\frac{mg-F}{m}})}{mg - F},$$

Otrzymujemy całkowity czas spadku pręta:

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \frac{m(-\sqrt{2gl} \pm \sqrt{2gl + 2H\frac{mg-F}{m}})}{mg - F} \approx 4,3s.$$

Odpowiedź: Czas spadku pręta kontrolnego do rdzenia wynosi 4,3 s. Uwaga - wynik 3,7 s, wynikający z założenia, że przyspieszenie zmiemskie wynosi 10 m/s^2, również uznawany był za poprawny.