Poskromić Atom
Ogólnopolski Konkurs Wiedzy o Energii Jądrowej
Edycja 2023, ETAP 2

ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Poniżej przedstawiamy rozwiązania zadań z treścią.

Zadanie 1 [6 punktów]

Neutron zderza się elastycznie z jądrem ^{4}He, a następnie, po odbiciu, zderza się elastycznie z jądrem ^{12}C. Jądra helu i węgla były nieruchome przed zderzeniem. Określ, ile razy energia kinetyczna neutronu zmieni się po dwóch zderzeniach. Zakładamy, że masy neutronu i protonu są takie same. Zaokrąglij odpowiedź do dziesiątych części.

Rozwiązanie:

1) Ponieważ neutron ulega zderzeniu sprężystemu z jądrem ^{4}He, to dla takiego oddziaływania można zapisać prawa zachowania pędu (w rzucie na oś x) i energii:

$$m_n v_0 = -m_n v_1 + m_\alpha u_1$$

$$m_n v_0^2 = m_n v_1^2 + m_\alpha u_1^2$$

gdzie m_n - masa neutronu, m_α - masa ^{4}He, v_0 - prędkość neutronu przed zderzeniem, v_1 - prędkość neutronu po zderzeniu, u_1 - prędkość jądra ^{4}He po zderzeniu.

Przesuwamy wszystkie wyrazy równań z masą neutronu na lewo, z masą jądra ^{4}He na prawo i dzielimy drugie równanie przez pierwsze. Otrzymujemy:

$$v_0 - v_1 = u_1$$

Powyższe wyrażenie na prędkość u_1 podstawiamy do prawa zachowania pędu:

$$m_n v_0 = -m_n v_1 + m_\alpha v_0 - m_\alpha v_1$$

Otrzymujemy wyrażenie na prędkość neutronu po zderzeniu:

$$v_1(m_\alpha + m_n) = v_0(m_\alpha - m_n)$$

$$v_1 = v_0 \frac{m_\alpha - m_n}{m_\alpha + m_n}$$

Jądro atomu helu ^{4}He składa się z dwóch protonów i dwóch neutronów. Zakładamy, że masy neutronu i protonu są takie same, zatem możemy zapisać:

$$m_\alpha = 4 \cdot m_n$$

Wówczas prędkość neutronu po zderzeniu wynosi:

$$v_1 = v_0 \frac{4m_n - m_n}{4m_n + m_n} = \frac{3}{5} v_0$$

2) Przy drugim zderzeniu zapisujemy prawa zachowania w postaci:

$$m_n v_1 = -m_n v_2 + m_C u_2$$

$$m_n v_1^2 = m_n v_2^2 + m_C u_2^2$$

gdzie m_C - masa jądra atomu ^{12}C, v_1 - prędkość neutronu przed drugim zderzeniem, v_2 - prędkość neutronu po drugim zderzeniu, u_2 - prędkość jądra ^{12}C po zderzeniu.
Przeprowadźmy podobne przekształcenia i znajdźmy prędkość v_2:

$$v_2 = v_1 \frac{m_C - m_n}{m_C + m_n}$$

Jądro atomu helu ^{12}C składa się z sześciu protonów i sześciu neutronów. Zakładamy, że masy neutronu i protonu są takie same, zatem możemy zapisać:

$$m_C = 12 \cdot m_n$$

Zatem:

$$v_2 = v_1 \frac{12m_n - m_n}{12m_n + m_n} = \frac{11}{13} v_1$$

Biorąc pod uwagę prędkość v_1 mamy:

$$v_2 = \frac{33}{65} v_0$$

Następnie:

$$\frac{E_0}{E_2} = \frac{m_n v_0^2}{2} \cdot \frac{2}{m_n v_2^2} = (\frac{v_0}{v_2})^2 = (\frac{v_0}{\frac{33}{65} v_0})^2 = (\frac{65}{33})^2 \approx (1,97)^2 \approx 3,9$$

lub

$$\frac{E_2}{E_0} = \frac{1}{3,9} = 0,3$$

Odpowiedź: $\frac{E_0}{E_2} = 3,9$; $\frac{E_2}{E_0} = 0,3$

Zadanie 2 [8 punktów]

Pacjentowi podano radiofarmaceutyk zawierający izotop gamma-promieniotwórczy pallad-103. Aby zniszczyć guz nowotworowy, musi być on poddany ekspozycji na promieniowanie gamma przez 30 dni, aby całkowita energia zdeponowana w guzie wynosiła 2,12 J. Zakładamy, że pallad-103 ma okres połowicznego rozpadu 17,0 d i emituje promieniowanie gamma o energii 21,0 keV, które jest całkowicie absorbowane przez guz. Polecenia:
(a) znajdź początkową aktywność promieniotwórczą podanego pacjentowi radiofarmaceutyku,
(b) znajdź całkowitą masę promieniotwórczego palladu-103, jaką zawiera podana pacjentowi dawka radiofarmaceutyku.
(c) oblicz grubość blachy ołowianej, jakiej należy użyć do osłony źródła otwartego zawierającego pallad-103, aby natężenie wiązki emitowanego ze źródła promieniowania gamma uległo trzykrotnemu zmniejszeniu.

Rozwiązanie:

Na początku wyznaczamy całkowitą liczbę atomów palladu-103.
Prawo rozpadu promieniotwórczego:

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$$

gdzie N_0 - początkowa liczba atomów danego izotopu, *N(t)* - liczba atomów danego izotopu po czasie t, $T_{1/2}$ - czas połowicznego rozpadu.
Z równania otrzymujemy liczbę atomów palladu-103 po 30 dniach N:

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{17}{30}} = N_0 \cdot 2^{-1{,}7647} = 0,294{\cdot}N_0$$

Stąd liczba atomów palladu-13, które rozpadły się:

$$N_0 - N = (1 - 0,294){\cdot}N_0 = 0,706{\cdot}N_0$$

W ciągu 30 dni zdeponowana energia promieniowania gamma emitowana przez pallad-103 wyniosła 2,12 J, zatem:

$$2,12J = 0,706{\cdot}N_0{\cdot}(21{\cdot}10^3 eV){\cdot}(\frac{1,6{\cdot}10^{-19}J}{1eV})$$

Stąd wyliczamy N_0

$$N_0 = \frac{2,12J}{2,37{\cdot}10^{-15}J} = 8,94{\cdot}10^{14}$$

Polecenie a:
aktywność promieniotwórcza podanego radiofarmaceutyku A_0

$$A_0 = \lambda{\cdot}N_0$$

gdzie λ - stała rozpadu promieniotwórczego, $\lambda = \frac{ln2}{T_{1/2}}$. Stąd:

$$A_0 = \frac{ln2}{17d} \cdot (8,94 \cdot 10^{14}) \cdot (\frac{1d}{86400s}) = 4,22 \cdot 10^8 Bq$$

Polecenie b:

całkowita masa podanego pacjentowi palladu-103 m_p

$$m_p = N_0 \cdot m_{1atomu} = 8,94 \cdot 10^{14} \cdot (103u) \cdot (\frac{1,66 \cdot 10^{-27}kg}{1u}) = 1,53 \cdot 10^{-10}kg = 153ng$$

Polecenie c:

Osłabienie natężenia I wiązki promieniowania gamma dane jest wzorem:

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu d}$$

gdzie I_0 - początkowe natężenie wiązki, d - grubość blachy ołowiowej, μ - liniowy współczynnik osłabienia.

Natężenie wiązki powinno ulec trzykrotnemu zmniejszeniu, zatem:

$$I = \frac{1}{3} I_0$$

Stąd otrzymujemy:

$$\frac{1}{3} I_0 = I_0 \cdot e^{-\mu d}$$

$$e^{-\mu d} = \frac{1}{3}$$

Po zlogarytmowaniu stronami otrzymujemy:

$$-\mu d = ln(\frac{1}{3})$$

Zatem grubość blachy ołowiowej:

$$d = -\frac{ln(\frac{1}{3})}{\mu}$$

W treści zadania nie podano wartości liniowego współczynnika osłabienie promieniowania w ołowiu μ. Znalezienie właściwej wartości okazało się bardzo trudne, dlatego Komisja Konkursowa postanowiła uznać tą część zadania za prawidłowo rozwiązaną, jeżeli przyjęto wartość liniowego współczynnika osłabienia promieniowania w ołowiu μ, dla energii 100 keV, która wynosi 60 cm^{-1} lub bliższą energii 21 keV, jednocześnie podając źródło tych danych.

Otrzymujemy wówczas:

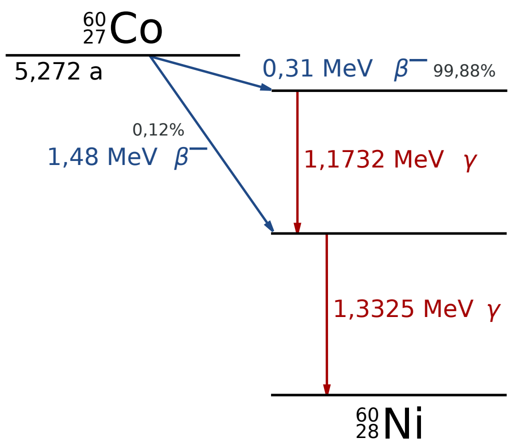
$$d = -\frac{(-1,1)}{60\frac{1}{cm}} \approx 0,018cm$$

Odpowiedź: a) Początkowa aktywność promieniotwórcza podanego pacjentowi radiofarmaceutyku wynosi 4,22$\cdot 10^8 Bq$, b) całkowita masa promieniotwórczego palladu-103 podanego pacjentowi wynosi 153 ng, c) grubość blachy ołowianej, jakiej należy użyć do osłony źródła otwartego zawierającego pallad-103 to 0,018 cm.

Zadanie 3 [10 punktów]

Wstęp:

Kobalt-60 jest promieniotwórczym izotopem kobaltu, który jest powszechnie wykorzystywany w medycynie i przemyśle. Co-60 ulega rozpadowi β-, ale podczas rozpadu emitowane są dwa kwanty promieniowania γ o energiach 1,17 i 1,33 MeV (Rys. 1) Co-60 ma czas połowicznego rozpadu



Rysunek 1: *Schemat rozpadu Co–60*

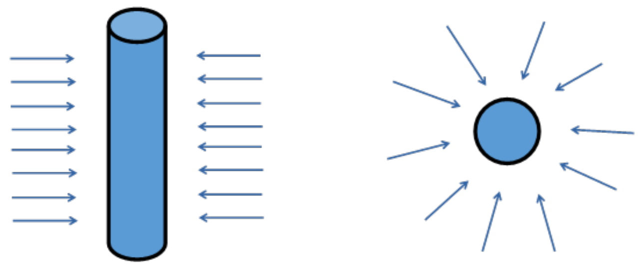
wynoszący 5,2714 roku i pozwala uzyskać wiązkę promieniowania gamma o dużej intensywności przy dość długim czasie efektywnego wykorzystania źródła. Co-60 jest szeroko stosowany w radioterapii (w urządzeniach nazywanych bombami kobaltowymi), do sterylizacji (np. narzędzi medycznych), defektoskopii (nieniszczącym wykrywaniu uszkodzeń) i szerzej radiografii przemysłowej. Co-60 jest produkowany w wyniku reakcji jądrowych: wychwytu neutronu przez stabilny izotop Co-59:

$$^{59}Co + n \longrightarrow ^{60}Co$$

Kobalt-60 jest obecnie produkowany głównie w reaktorach typu CANDU (Canada Deuterium Uranium), ale wobec stale rosnącego zapotrzebowania rozważane są inne możliwości. Jedną z nich jest wytwarzanie Co-60 w rektorach wodnych ciśnieniowych (PWR), takich, jakie mają być zbudowane w Polsce (np. AP-1000, APR-1400 lub EPR).

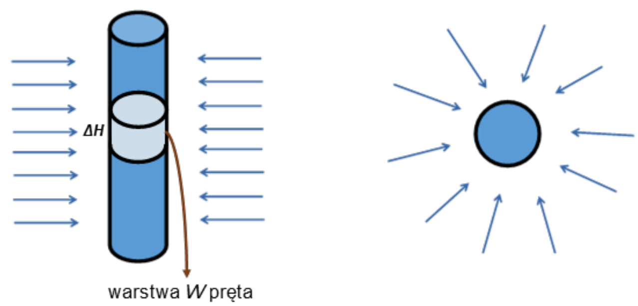
Zadanie:

Oszacuj, ile gramów Co-60 można otrzymać w ciągu roku w reaktorze PWR, jeśli umieścimy w nim jeden pręt z Co-59. Pręt ma kształt walca o wysokości $H = 400$ cm i średnicy $D = 1$ cm i jest w całości wypełniony Co-59. Przyjmij, że strumień neutronów przenikających przez powierzchnię boczną pręta wynosi $\phi = 2{\cdot}10^{12}$ cm^{-2}s^{-1}, a prawdopodobieństwo, że dojdzie do reakcji wychwytu neutronu przez jądro Co-59 wynosi średnio $p = 4{\cdot}10^{-24}$ i jest niezależne od położenia wewnątrz pręta. Zakładamy, że neutrony wewnątrz pręta poruszają się w przybliżeniu w płaszczyźnie poziomej, a pojedynczy neutron może oddziaływać z atomami Co-59 w warstwie pręta o grubości $\Delta H = 1$ mm. Straty wynikające z rozpadów Co-60 zaniedbujemy. Masa molowa kobaltu: 58,93 g/mol, gęstość kobaltu: 8,9 g/cm^3.



Rozwiązanie:

Wymiary warstwy W pręta (rysunek poniżej), w którym dochodzi do oddziaływania pojedynczego neutronu z jądrami Co-59: wysokość ΔH = 0,1 cm, średnica D = 1 cm.



Na początek obliczamy, ile neutronów przejdzie przez warstwę W i ile w tej warstwie znajduje się jąder Co-59.

Liczba neutronów $N_{neutron}$ przechodzących przez warstwę pręta o wysokości ΔH w czasie Δt:

$$N_{neutron} = \phi \cdot (\text{powierzchnia boczna warstwy W}) \cdot (\text{czas}) = \phi \cdot \pi D \cdot \Delta H \cdot \Delta t = 1,98 \cdot 10^{19}$$

gdzie Δt = 60 s · 60 · 24 · 365 s.

Masa Co-59 m w pojedynczej warstwie pręta o wysokości ΔH:

$$m = V \cdot \rho = (\Delta H \cdot (\pi D/2)^2)\rho = 0,7g$$

gdzie V - objętość warstwy pręta, ρ - gęstość kobaltu.

Liczba moli n w pojedynczej warstwie pręta o wysokości ΔH:

$$n = m/M = 0,012 mola$$

gdzie M - masa molowa kobaltu.

Liczba jąder Co-59 N_{Co-59}:

$$N_{Co-59} = n \cdot N_A = 7,22 \cdot 10^{21}$$

gdzie N_A - liczba Avogadro.

Neutrony poruszające się w materiale mogą zderzać się sprężyście lub niesprężyście z jądrami Co-59, zmieniając kierunek ruchu. Dokładny opis takiego zjawiska, a potem oddziaływania, jest dość trudny, więc do oszacowania masy wyprodukowanego Co-60 poczynimy kilka założeń.

1. Ile jąder Co-59 może napotkać na swojej drodze neutron przechodząc przez pręt?
W zadaniu założyliśmy, że pojedynczy neutron może oddziaływać z atomami Co-59 w warstwie pręta o grubości ΔH = 1 mm. Możemy przyjąć (bardzo optymistyczne) założenie, że w takim przypadku neutron może zderzyć się z każdym atomem Co-59 w takiej warstwie.

2. Liczba jąder Co-59 jest w przybliżeniu stała w czasie.
Ponieważ liczba atomów Co-59 jest znacznie większa niż liczba neutronów spodziewana w czasie podanym, to można zaniedbać zmniejszanie się w czasie liczby Co-59 w wyniku reakcji $^{59}Co + n \longrightarrow ^{60} Co$ w tej warstwie.

3. Ile wynosi prawdopodobieństwo p_n zdarzenia, że neutron przechodząc przez warstwę W zostanie wychwycony przez któreś jąder Co-59, które napotkał na swojej drodze?
Prawdopodobieństwo pojedynczej reakcji wychwytu jest stałe, więc zderzenia można potraktować jako próby Bernoulliego, w których sukcesem jest wychwyt neutronu i produkcja Co-60, a porażką sytuacja, że do reakcji nie dojdzie. W takim przypadku prawdopodobieństwo sukcesu to $p = 4 \cdot 10^{-24}$, a porażki $q = 1 – p$.

Zakładamy, że takich prób będzie tyle, ile jąder Co-59 w warstwie W, czyli $N = N_{Co-59}$. Interesuje nas przypadek, w którym mamy dokładnie jeden sukces (k = 1), ponieważ po zajściu jednej reakcji neutron nie może doprowadzić do kolejnej. Wtedy prawdopodobieństwo, że neutron przechodząc przez warstwę W zostanie wychwycony przez któreś z jąder Co-59 możemy obliczyć z wzoru Bernoulliego:

$$p_n(k = 1) = (N_k)p^k(1 - p)^{N-k} \approx N_{Co-59} \cdot p$$

ponieważ: $q = 1 – p \approx 1$.

4. Spodziewamy się, że dla wszystkich neutronów $N_{neutron}$ przechodzących przez warstwę W dostaniemy liczbę wyprodukowanych jąder Co-60 równą liczbie reakcji wychwytu:

$$N_{Co-60}^{\Delta H} = p_n \cdot N_{neutron} = p \cdot N_{neutron} \cdot N_{Co-59} = 5,72 \cdot 10^{17}$$

Liczba wszystkich reakcji w całym pręcie paliwowym tj. wyprodukowanych jąder Co-60 N_{Co-60}:

$$N_{Co-60} = \frac{H}{\Delta H} \cdot N_{Co-60}^{\Delta H} = 2,29 \cdot 10^{21}$$

Zatem masa Co-60 m_{Co-60}:

$$m_{Co-60} = \frac{N_{Co-60}}{N_A} \cdot M \approx 0,22g$$

Uwaga:
Przy ocenianiu zadania uznawaliśmy rozwiązania, które zakładały, że warstwa W to wydrążony w środku walec o wysokości H i grubości ścianki ΔH.

Komentarz:
W rzeczywistości masa produkowanego Co-60 bardzo silnie zależy od parametrów pracy reaktora tj. strumienia neutronów (który może wahać się w zakresie 10^{12}–$10^{14} \frac{1}{cm \cdot s}$) oraz prawdopodobieństwa reakcji, które opisywane jest przez tzw. przekrój czynny i silnie zależy od energią neutronów. Realistyczne symulacje i oszacowania wskazują, że w ciągu roku można w rektorze typu PWR uzyskać masę Co-60 rzędu kilkudziesięciu gramów (w zależności przyjętych założeń).

Odpowiedź: Masa Co-60, którą można trzymać w ciągu roku w reaktorze PWR, w zadanych w zadaniu warunkach, wynosi około 0,22 g.

Zadanie 4 [10 punktów]

Ile wody o temperaturze 0°C można zamienić w parę, jeśli wykorzysta się całe ciepło wydzielone podczas tworzenia z protonów i neutronów 0,2 g helu-4? Przyjmij masę protonu równą $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, masę neutronu – $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, masę jądra atomu helu-4 - $6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg.
Masa molowa helu: $4 \cdot 10^{-3}$ kg/mol, ciepło właściwe parowania: $c_p = 2{,}3 \cdot 10^6$ J/kg, ciepło właściwe wody: c_w= 4190 J/(kg·K), prędkość światła w próżni: c = $3 \cdot 10^8$ m/s.
Wynik należy przedstawić w tonach i zaokrąglić do części dziesiętnych.

Rozwiązanie:
Energia uwalniana podczas tworzenia helu z protonów i neutronów jest wykorzystywana do podgrzewania i odparowywania wody:

$$E = Q_1 + Q_2 \tag{1}$$

gdzie:
$Q_1 = c_w \cdot m_w \cdot \Delta T$ – energia potrzebna do ogrzania wody od zera stopni Celsjusza do temperatury wrzenia, przy czym m_w - masa wody, $\Delta T = 100°C = 100K$,
$Q_2 = c_p \cdot m_w$ – energia potrzebna do odparowania wody, przy czym c_p - ciepło właściwe parowania,
$E = \Delta m_{He} \cdot c^2 \cdot N$ – energia wydzielana podczas tworzenia helu z protonów i neutronów, przy czym Δm_{He} - defekt masy jądra atomu helu.
N jest liczbą atomów w 0,2 g helu, którą można wyznaczyć z zależności:

$$N = \frac{m_{He}}{M_{He}} \cdot N_A$$

gdzie M_{He} - masa molowa helu, N_A - liczba Avogadro. Znając zależności na Q_1, Q_2 oraz E równanie 1 przyjmuje postać:

$$\Delta m_{He} \cdot c^2 \cdot \frac{m_{He}}{M_{He}} \cdot N_A = c_w \cdot m_w \cdot \Delta T + c_p \cdot m_w$$

Defekt masy jądra atomu helu wyznaczamy ze wzoru:

$$\Delta m_{He} = z \cdot m_p + n \cdot m_n - m_j$$

gdzie m_j - masę jądra atomu helu-4. W tym przypadku $z = 2$ - liczba protonów, a $n = 2$ - liczba neutronów w jądrze He-4.

Stąd otrzymujemy:

$$(z{\cdot}m_p + n{\cdot}m_n - m_j){\cdot}c^2{\cdot}\frac{m_{He}}{M_{He}}{\cdot}N_A = m_w(c_w{\cdot}\Delta T + c_p)$$

Stąd otrzymujemy wzór na masę wody m_w:

$$m_w = \frac{(z{\cdot}m_p + n{\cdot}m_n - m_j){\cdot}c^2{\cdot}\frac{m_{He}}{M_{He}}{\cdot}N_A}{c_w{\cdot}\Delta T + c_p}$$

Zatem otrzymujemy:

$$m_w = \frac{(2{\cdot}1,67{\cdot}10^{-27}kg + 2{\cdot}1,67{\cdot}10^{-27}kg - 6,64{\cdot}10^{-27}kg){\cdot}(3{\cdot}10^8\frac{m}{s})^2{\cdot}\frac{0,2g}{4\frac{g}{mol}}{\cdot}6,02{\cdot}10^{23}\frac{1}{mol}}{4190\frac{J}{kg{\cdot}K}{\cdot}100K + 2,3{\cdot}10^6\frac{J}{kg}} =$$

$$= 39,85{\cdot}10^3kg \approx 39,9ton$$

Odpowiedź: 39,9 ton wody o temperaturze 0°C można zamienić w parę, jeśli wykorzysta się całe ciepło wydzielone podczas tworzenia z protonów i neutronów 0,2 g helu-4.